**\_ \_\_\_**

**/ |/ \_ \**

**| | | | |**

**| | |\_| |**

**|\_|\\_\_\_/**

**\_\_\_\_ \_ \_\_**

**| \_ \ \_ \_\_ \_\_\_ \_\_ \_ \_ \_\_ \_\_ \_ \_ \_\_ \_\_\_ \_\_ \_ \_\_\_(\_) /\_/ \_ \_\_**

**| |\_) | '\_\_/ \_ \ / \_` | '\_\_/ \_` | '\_ ` \_ \ / \_` |/ \_\_| |/ \_ \| '\_ \**

**| \_\_/| | | (\_) | (\_| | | | (\_| | | | | | | (\_| | (\_\_| | (\_) | | | |**

**|\_| |\_| \\_\_\_/ \\_\_, |\_| \\_\_,\_|\_| |\_| |\_|\\_\_,\_|\\_\_\_|\_|\\_\_\_/|\_| |\_|**

**|\_\_\_/**

**\_\_\_\_ \_ \_\_ \_**

**| \_ \(\_)\_ \_\_ /\_/\_ \_ \_\_ \_\_\_ (\_) \_\_\_ \_\_ \_**

**| | | | | '\_ \ / \_` | '\_ ` \_ \| |/ \_\_/ \_` |**

**| |\_| | | | | | (\_| | | | | | | | (\_| (\_| |**

**|\_\_\_\_/|\_|\_| |\_|\\_\_,\_|\_| |\_| |\_|\_|\\_\_\_\\_\_,\_|**

**Contenido**

**=========**

**1. Introducción.**

**2. Definición del Problema.**

**3. Un Problema de Inventarios.**

**4. El Problema de la Diligencia.**

**5. El Problema de la Mochila.**

**6. El Problema de Fallas Simultáneas.**

**7. El Problema del Reemplazo de Equipos.**

**8. Resumen.**

**9. Ejercicios.**

**1. Introducción.**

**================**

**El término programación dinámica se refiere a una técnica de optimización general que se utiliza para resolver una clase especial de problemas que poseen múltiples etapas ordenadas en secuencia.**

**Por ejemplo, suponga que existe una compañía que debe tomar una decisión sobre su plan de producción para los próximos meses. Los meses en que se debe realizar la producción son las etapas. El objetivo de la producción puede ser minimizar los costos de producción o maximizar las ventas.**

**Para resolver el problema este se divide en etapas, posteriormente cada una de ellas son resueltas hasta que el problema inicial es resuelto. Para resolver e integrar las diferentes etapas del problema se debe expresar el proceso de cálculo mediante una fórmula recursiva. Las fórmulas suelen resolverse del final hacia el inicio del problema.**

**2. Definición del Problema.**

**===========================**

**Los problemas que se resolverán se pueden plantear matemáticamente como:**

**Maximizar: f1(x1) + f2(x2) + ... + fn(xn) = z**

**Sujeto a: x1 + x2 + ... + xn <= b**

**Donde: x1,x2,...,xn >= 0 y enteras**

**Las funciones "f" no son necesariamente lineales. Asimismo cada una de las variables xi representa un etapa del problema. Los valores que pueden tomar serán los estados de esta etapa. A continuación se explican en mayor detalle algunos términos importantes para entender el proceso de formulación de problemas.**

**() Etapa.**

**Cada punto donde se debe tomar una decisión. El final de una etapa coincide con el inicio de otra. Cada variable "xi" representa una etapa del problema.**

**() Estado.**

**Los valores que pueden tomar las variables dentro de un etapa se conocen como estado. Cada posible valor de "xi" representa un estado del problema.**

**() Principio de Optimalidad.**

**Dentro de una etapa se escoge el estado que mejor se apegue al principio de optimalidad deseado. Si se trata de maximizar una función se escogerá el estado de mayor valor. También se puede llevar a cabo un problema de minimización.**

**3. Un Problema de de Inventarios.**

**=================================**

**Un compañía fabrica un producto único. La demanda para los próximos cuatro meses es de 1000 unidades para el primer mes, 800 unidades para el segundo mes, 1200 unidades para el tercer mes y 900 unidades para el último mes.**

**El costo de producción de los artículos varía de mes a mes, debido al aumento en la materia prima. Para el primer mes cuesta $10 por artículo, para el segunto mes $20, para el tercer mes $10 y para el cuarto mes $20 por artículo. Un mes dado se pueden producir más artículos de lo necesario, los cuales se pueden guardar como inventario, en una bodega, a un costo de $3 por unidad.**

**A continuación se presenta una tabla con estos datos:**

**--------------------------------------------**

**No. Mes Demanda Costo Inventario**

**--------------------------------------------**

**1 Enero 1000 $10 $3**

**2 Febrero 800 $20 $3**

**3 Marzo 1200 $10 $3**

**4 Abril 900 $20 $3**

**--------------------------------------------**

**Total 3900**

**--------------------------------------------**

**Se desea encontrar una política de producción óptima que minimice los costos totales.**

**R/**

**Cada mes consiste en una manera de tomar decisiones, además se inicia el problema del final hacia el inicio. Primero se planteará el problema como un conjunto de fórmulas. Posteriormente se utilizará una representación más sencilla de tablas.**

**Se utilizarán las siguientes variables:**

**x1: cantidad que se producirá en enero.**

**x2: cantidad que se producirá en febrero.**

**x3: cantidad que se producirá en marzo.**

**x4: cantidad que se producirá en abril.**

**Etapa 5:**

**--------**

**G(5)=0 \***

**Etapa 4:**

**--------**

**G(4)=min**

**{**

**p(900) + G(5) = 20\*900 + 0 = 18000 \***

**}**

**Etapa 3:**

**--------**

**G(3)=min**

**{**

**p(1200) + G(4)**

**= 10\*(1200) + 18000**

**= 30000**

**p(1200+900) + i(900) + G(5)**

**= 10\*(1200+900) + 3\*900 + 0**

**= 23700 \***

**}**

**Etapa 2:**

**--------**

**G(2)=min**

**{**

**p(800) + G(3)**

**= 20\*(800) + 23700**

**= 39700\***

**p(800+1200) + i(1200) + G(4)**

**= 20\*(800+1200) + 3\*1200 + 18000**

**= 61600**

**p(800+1200+900) + i(1200) + i(900) + G(5)**

**= 20\*(800+1200+900) + 3\*1200 + 6\*900 + 0**

**= 67000**

**}**

**Etapa 1:**

**--------**

**G(1)=min**

**{**

**p(1000) + G(2)**

**= 10\*(1000) + 39700**

**= 49700**

**p(1000+800) + i(800) + G(3)**

**= 10\*(1000+800) + 3\*800 + 23700**

**= 44100 \***

**p(1000+800+1200) + i(800)+ i(1200) + G(4)**

**= 10\*(1000+800+1200) + 3\*800 + 6\*1200 + 18000**

**= 57600**

**p(1000+800+1200+900) + i(800) + i(1200) + i(900) + G(5)**

**= 10\*(1000+800+1200+900) + 3\*800 + 6\*1200 + 9\*900 + 0**

**= 56700**

**}**

**Al recorrer las fórmulas se encuentra la solución óptima del problema, con un costo de 44100 y la respuesta óptima consiste en producir en enero para enero y febrero y luego producir en marzo lo de marzo y abril.**

**z =44100**

**x1= 1800 (1000 + 800)**

**x2= 0**

**x3= 2100 (1200 + 900)**

**x4= 0**

**4. El Problema de la Diligencia.**

**================================**

**Una diligencia debe llevar dinero desde la ciudad "a" hasta la ciudad "t" utilizando la ruta más corta posible. La distancias entre ciudades se encuentran descritas por el siguiente grafo.**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| -> | b c d | | -> | e f g |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| a | 4 6 6 | | b | 6 8 9 |**

**| | | | c | 5 4 6 |**

**| | | | d | 5 5 7 |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| -> | h i | | -> | t |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| e | 6 8 | | h | 9 |**

**| f | 4 9 | | i | 6 |**

**| g | 3 7 | | | |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**Se puede observar que las rutas anteriores constituyen un grafo donde cada "capa" esta conectada únicamente con la capa siguiente. Se pueden identificar cuatro estados para el problema de programación dinámica.**

**6........ 6........**

**.(B)8 .(E). .(H)9**

**.´ 9`. .´. 8 .´. `.**

**.´ . `.´ . . .´ . `.**

**.´ .´ `. .´ . `.**

**4´ 5´ . . `. 4´ . . `.**

**(A)6........(C)4........(F). . (T)**

**6 6 . . . 9 . . .**

**`. `. .´ `. . .´**

**`. . `.´ . . `. . .´**

**`. 5 .´ `. . 3 `. . .´**

**`.(D)5´ `.(G). `.(I)6´**

**7........ 7........**

**-----------|-----------|-----------|-----------|**

**1 2 3 4**

**R/**

**Se utilizan las siguientes variables, partiendo de del nodo "a". El valor del arco del nodo "i" al nodo "j" se denominará como v(i,j).**

**x1: partiendo de "a" que ruta tomo hacia "b,c,d".**

**x2: partiendo de "b,c,d" que ruta tomo hacia "e,f,g".**

**x3: partiendo de "e,f,g" que ruta tomo hacia "h,i".**

**x4: partiendo de "h,i" que ruta tomo hacia "t".**

**Etapa 5:**

**--------**

**G(t) = 0 \***

**Etapa 4:**

**--------**

**G(h) = v(h,t) + G(t) = 9 + 0 = 9 \***

**G(i) = v(i,t) + G(t) = 6 + 0 = 6 \***

**Etapa 3:**

**--------**

**G(e) = min**

**{**

**v(e,h) + G(h) = 6 + 9 = 15**

**v(e,i) + G(i) = 8 + 6 = 14 \***

**}**

**G(f) = min**

**{**

**v(f,h) + G(h) = 4 + 9 = 13 \***

**v(f,i) + G(i) = 9 + 6 = 15**

**}**

**G(g) = min**

**{**

**v(g,h) + G(h) = 3 + 9 = 12 \***

**v(g,i) + G(i) = 7 + 6 = 13**

**}**

**Etapa 2:**

**--------**

**G(b) = min**

**{**

**v(b,e) + G(e) = 6 + 14 = 20 \***

**v(b,f) + G(f) = 8 + 13 = 21**

**v(b,g) + G(g) = 9 + 12 = 21**

**}**

**G(c) = min**

**{**

**v(c,e) + G(e) = 5 + 14 = 19**

**v(c,f) + G(f) = 4 + 13 = 17 \***

**v(c,g) + G(g) = 6 + 12 = 18**

**}**

**G(d) = min**

**{**

**v(d,e) + G(e) = 5 + 14 = 19**

**v(d,f) + G(f) = 5 + 13 = 18 \***

**v(d,g) + G(g) = 7 + 12 = 19**

**}**

**Etapa 1:**

**--------**

**G(a) = min**

**{**

**v(a,b) + G(b) = 4 + 20 = 24**

**v(a,c) + G(c) = 6 + 17 = 23 \***

**v(a,d) + G(d) = 6 + 18 = 24**

**}**

**Con el último cálculo se puede construir el camino que se debe seguir, el cual tendrá un valor de 23.**

**z = 23**

**a -> c -> f -> h -> t**

**5. El Problema de la Mochila.**

**=============================**

**Una persona se encuentra en una cueva donde hay tres tipos de piedras preciosas. Diamantes, esmeraldas y rubíes. Cada una de estas piedras tiene un cierto peso y valor, los cuales se describen en la siguiente tabla.**

**-------------------------**

**Piedra Peso Valor**

**kilos dólares**

**-------------------------**

**Diamante 4 1000**

**Esmeralda 3 700**

**Rubí 5 1200**

**-------------------------**

**La persona tiene un bolsa en la que puede llevar un máximo de 11 kilos. El problema consiste en decidir cuántas piedras de cada clase debe llevar de manera tal que no se exceda la capacidad de la bolsa. Las piedras no se pueden romper, pues son sumamente duras y no se cuenta con herramientas para cortarlas. Se desea maximizar la ganancia al momento de vender el contenido de la bolsa.**

**R/**

**Se utilizan las siguientes variables:**

**x1: cantidad de diamantes que llevo.**

**x2: cantidad de esmeraldas que llevo.**

**x3: cantidad de rubíes que llevo.**

**Etapa 3: Rubíes.**

**----------------**

**R(0) = v(0,r) = 0 \***

**R(1) = v(0,r) = 0 \***

**R(2) = v(0,r) = 0 \***

**R(3) = v(0,r) = 0 \***

**R(4) = v(0,r) = 0 \***

**R(5) = max**

**{**

**v(0,r) = 0**

**v(1,r) = 1200 \***

**}**

**R(6) = max**

**{**

**v(0,r) = 0**

**v(1,r) = 1200 \***

**}**

**R(7) = max**

**{**

**v(0,r) = 0**

**v(1,r) = 1200 \***

**}**

**R(8) = max**

**{**

**v(0,r) = 0**

**v(1,r) = 1200 \***

**}**

**R(9) = max**

**{**

**v(0,r) =0**

**v(1,r) = 1200 \***

**}**

**R(10)= max**

**{**

**v(0,r) = 0**

**v(1,r) = 1200**

**v(2,r) = 2400 \***

**}**

**R(11)= max**

**{**

**v(0,r) = 0**

**v(1,r) = 1200**

**v(2,r) = 2400 \***

**}**

**Etapa 2: Esmeraldas.**

**--------------------**

**E(0) = max**

**{**

**v(0,e) + R(0) = 0 + 0 = 0 \***

**}**

**E(1) = max**

**{**

**v(0,e) + R(1) = 0 + 0 = 0 \***

**}**

**E(2) = max**

**{**

**v(0,e) + R(2) = 0 + 0 = 0 \***

**}**

**E(3) = max**

**{**

**v(0,e) + R(3) = 0 + 0 = 0**

**v(1,e) + R(0) = 700 + 0 = 700 \***

**}**

**E(4) = max**

**{**

**v(0,e) + R(4) = 0 + 0 = 0**

**v(1,e) + R(1) = 700 + 0 = 700 \***

**}**

**E(5) = max**

**{**

**v(0,e) + R(5) = 0 + 1200 = 1200 \***

**v(1,e) + R(2) = 700 + 0 = 700**

**}**

**E(6) = max**

**{**

**v(0,e) + R(6) = 0 + 1200 = 1200**

**v(1,e) + R(3) = 700 + 0 = 700**

**v(2,e) + R(0) = 1400 + 0 = 1400 \***

**}**

**E(7) = max**

**{**

**v(0,e) + R(7) = 0 + 1200 = 1200**

**v(1,e) + R(4) = 700 + 0 = 700**

**v(2,e) + R(1) = 1400 + 0 = 1400 \***

**}**

**E(8) = max**

**{**

**v(0,e) + R(8) = 0 + 1200 = 1200**

**v(1,e) + R(5) = 700 + 1200 = 1900 \***

**v(2,e) + R(2) = 1400 + 0 = 1400**

**}**

**E(9) = max**

**{**

**v(0,e) + R(9) = 0 + 1200 = 1200**

**v(1,e) + R(6) = 700 + 1200 = 1900**

**v(2,e) + R(3) = 1400 + 0 = 1400**

**v(3,e) + R(0) = 2100 + 0 = 2100 \***

**}**

**E(10) = max**

**{**

**v(0,e) + R(10) = 0 + 2400 = 2400 \***

**v(1,e) + R(7) = 700 + 1200 = 1900**

**v(2,e) + R(4) = 1400 + 0 = 1400**

**v(3,e) + R(1) = 2100 + 0 = 2100**

**}**

**E(11) = max**

**{**

**v(0,e) + R(11) = 0 + 2400 = 2400**

**v(1,e) + R(8) = 700 + 1200 = 1900**

**v(2,e) + R(5) = 1400 + 1200 = 2600 \***

**v(3,e) + R(2) = 2100 + 0 = 2100**

**}**

**Etapa 1: Diamantes.**

**-------------------**

**D(11) = max**

**{**

**v(0,d) + E(11) = 0 + 2600 = 2600**

**v(1,d) + E(7) = 1000 + 1400 = 2400**

**v(2,d) + E(3) = 2000 + 700 = 2700 \***

**}**

**Con las tablas se debe reconstruir la solución final.**

**El valor de z=2700**

**Primero se toman 2 diamantes, peso 4 kilos c/u, quedan 3 kilos en la mochila.**

**Segundo se toma 1 esmeralda, peso 3 kilos c/u, quedan 0 kilos en la mochila.**

**Tercero se toman 0 rubíes , peso 5 kilos c/u, quedan 0 kilos en la mochila.**

**6. El Problema de Fallas Simultáneas.**

**=====================================**

**Una empresa está desarrollando tres proyectos informáticos diferentes de forma simultánea. Se cuenta con dos analistas adicionales los cuales pueden trabajar en los proyectos. Entre más analistas se asignen a un proyecto menor será su probabilidad de fracaso. Se han realizado estimaciones del impacto que puede tener el asignar personas adicionales a los proyectos, estas estimaciones son probabilidades de fracaso del proyecto y se presentan a continuación.**

**----------------------------**

**Analistas PA PB PC**

**----------------------------**

**0 0.40 0.60 0.80**

**1 0.20 0.40 0.50**

**2 0.15 0.20 0.30**

**----------------------------**

**Por ejemplo, si no se asignan más analistas a los proyectos, la probabilidad de que fracasen los tres estará dada por:**

**0.40 \* 0.60 \* 0.80 = 0.1920**

**Se desea realizar una asignación de analistas a los proyectos de manera tal que se minimice la probabilidad de que los tres fallen simultáneamente.**

**R/**

**En este problema se utilizarán las siguientes variables.**

**xA: cantidad de analistas asignados al proyecto A.**

**xB: cantidad de analistas asignados al proyecto B.**

**xC: cantidad de analistas asignados al proyecto C.**

**Etapa 3:**

**--------**

**C(0) = p(0,PC) = 0.80 \***

**C(1) = min**

**{**

**p(0,PC) = 0.80**

**p(1,PC) = 0.50 \***

**}**

**C(2) = min**

**{**

**p(0,PC) = 0.80**

**p(1,PC) = 0.50**

**p(2,PC) = 0.30 \***

**}**

**Etapa 2:**

**--------**

**B(0) = min**

**{**

**p(0,PB) \* C(0) = 0.60 \* 0.80 = 0.48 \***

**}**

**B(1) = min**

**{**

**p(0,PB) \* C(1) = 0.60 \* 0.50 = 0.30 \***

**p(1,PB) \* C(0) = 0.40 \* 0.80 = 0.32**

**}**

**B(2) = min**

**{**

**p(0,PB) \* C(2) = 0.60 \* 0.30 = 0.18**

**p(1,PB) \* C(1) = 0.40 \* 0.50 = 0.20**

**p(2,PB) \* C(0) = 0.20 \* 0.80 = 0.16 \***

**}**

**Etapa 1:**

**--------**

**A(2) = min**

**{**

**p(0,PA) \* B(2) = 0.40 \* 0.16 = 0.064**

**p(1,PA) \* B(1) = 0.20 \* 0.30 = 0.060 \***

**p(2,PA) \* B(0) = 0.15 \* 0.48 = 0.072**

**}**

**Al construir la respuesta se obtiene que si se inicia con dos analistas se deben asignar 1 al proyecto 1, 0 al proyecto 2 y 1 al proyecto 3 lo que disminuiría la probabilidad de fracaso a 0.06.**

**z =0.060**

**xA=1**

**xB=0**

**xC=1**

**7. El Problema del Reemplazo de Equipos.**

**========================================**

**En una fábrica se necesita utilizar continuamente una máquina muy costosa para los próximos 5 años. El costo de una máquina nueva tiene un valor de $1000. Después de los 5 años se venderá la máquina pues ya no es necesaria.**

**El costo del mantenimiento de la máquina es el siguiente.**

**Para el 1er año: $ 60**

**Para el 2do año: $ 80**

**Para el 3er año: $120**

**La máquina puede mantenerse en operación por tres años antes de que sea necesario cambiarla. El costo de salvamento, es decir, el costo de vender la máquina vieja es el siguiente:**

**Con un año de antiguedad: $800**

**Con dos años de antigüedad: $600**

**Con tres años de antigüedad: $500**

**Al inicio del problema, durante el año 0 se comprará una máquina nueva en $1000 y se debe pagar el mantenimiento respectivo de $60.**

**Se desea establecer una política de mantenimiento y sustitución de equipo de manera tal que se minimizen los costos totales.**

**R/**

**En este problema se utilizarán las siguientes variables.**

**x0: años para mantener la máquina desde el año 0.**

**x1: años para mantener la máquina desde el año 1.**

**x2: años para mantener la máquina desde el año 2.**

**x3: años para mantener la máquina desde el año 3.**

**x4: años para mantener la máquina desde el año 4.**

**x5: anos para mantener la máquina desde el año 5.**

**Se estimarán los costos de compra, mantenimiento y salvamento.**

**El costo para comprar, mantener y vender en 1 año:**

**c1 = c(0,1) = c(1,2) = c(2,3) = c(3,4) = c(4,5)**

**c1 = 1000 + (60) - 800 = 260**

**El costo de comprar, mantener y vender en 2 años:**

**c2 = c(0,2) = c(1,3) = c(2,4) = c(3,5)**

**c2 = 1000 + (60 + 80) - 600 = 540**

**El costo de comprar, mantener y vender en 3 años:**

**c3 = c(0,3) = c(1,4) = c(2,5)**

**c3 = 1000 + (60 + 80 + 120) - 500 = 760**

**Con ello se pueden calcular las fórmulas:**

**G(5) = 0 \***

**G(4) = min**

**{**

**c1 + G(5) = 260 + 0 = 260 \***

**}**

**G(3) = min**

**{**

**c1 + G(4) = 260 + 260 = 520 \***

**c2 + G(5) = 540 + 0 = 540**

**}**

**G(2) = min**

**{**

**c1 + G(3) = 260 + 520 = 780**

**c2 + G(4) = 540 + 260 = 800**

**c3 + G(5) = 760 + 0 = 760 \***

**}**

**G(1) = min**

**{**

**c1 + G(2) = 260 + 760 = 1020 \***

**c2 + G(3) = 540 + 520 = 1060**

**c3 + G(4) = 760 + 260 = 1020 \***

**}**

**G(0) = min**

**{**

**c1 + G(1) = 260 + 1020 = 1280 \***

**c2 + G(2) = 540 + 760 = 1300**

**c3 + G(3) = 760 + 520 = 1280 \***

**}**

**Al construir la respuesta de las tablas se obtienen varias rutas posibles debido a los empates. Todas las soluciones tienen el mismo valor.**

**Solución 1: 0 --> 1 --> 2 -------> 5**

**Solución 2: 0 --> 1 -------> 4 --> 5**

**Solución 3: 0 -------> 3 --> 4 --> 5**

**Todas con un valor de z = 1280**

**Es posible ver los diferentes caminos mediante el siguiente grafo:**

**.-----(2)-----(5) = $1280**

**/ 260 760**

**/**

**.-----(1)**

**/ 260 \**

**/ \**

**/ `-----(4)-----(5) = $1280**

**(0) 760 260**

**\**

**\**

**\**

**`-----(3)--------(4)-----(5) = $1280**

**760 260 260**

**A continuación se muestra otra forma de presentar las soluciones a los problemas de reemplazo de equipo.**

**(0)------(1)-----(2)-----(3)-----(4)-----(5) Ruta**

**(0)......(1).....(2).....................(5) Ruta 1 $1280**

**260 260 760**

**(0)......(1).....................(4).....(5) Ruta 2 $1280**

**260 760 260**

**(0)......................(3).....(4).....(5) Ruta 3 $1280**

**760 260 260**

**8. Resumen.**

**===========**

**Las técnicas de programación dinámica son útiles para realizar una secuencia de decisiones interrelacionadas. Para utilizar esta técnica se descompone el problema original en un conjunto de etapas que se deben realizar una tras otra. Cada etapa tiene un conjunto de estados o valores. Desde el punto de vista computacional esto permite realizar el problema con mayor eficiencia. En contraste a esto, la mayoría de los problemas de programación lineal tratan de resolver el problema al considerar todas las restricciones de manera simultánea.**

**Se han analizado las técnicas más sencillas de programación dinámica. Son problemas determininísticos, de valores discretos, resueltos de atrás hacia adelante. Al cambiar cada una de estas restricciones se producen problemas muy interesantes y complejos. Existen problemas probabilísticos, donde el objetivo es minimizar o maximizar el valor esperado de alguna variable. Asimismo modelos donde el valor de las variables es una función continua la cual debe ser maximizada o minimizada utilizando cálculo diferencial y localización de ceros. Existen además problemas que deben ser resueltos en diferentes direcciones, no solamente de atrás hacia adelante.**

**Finalmente es importante mencionar que aunque este técnica parece muy tediosa y larga al realizarse, es mucho más eficiente que un enfoque de fuerza bruta donde se deben considerar todas las posibilidades.**

**+++**

**9. Ejercicios.**

**==============**

**() Ejercicio 1.**

**Un compañía tiene que suplir las siguientes cantidades de su producto estrella, la computadora Mimi-B. La producción que se realiza durante un mes se debe entregar el último día de dicho mes. El costo de producción es variable, ya que el precio de la materia prima oscila. De igual forma el costo de mantener inventarios es variable en cada mes, puesto que se debe alquilar el espacio de almacenamiento y en ciertos meses este costo sube. Se desea encontrar una política de producción óptima que minimice los costos totales.**

**--------------------------------------------------**

**Costo Costo**

**No. Mes Demanda Producción Inventario**

**--------------------------------------------------**

**1 Enero 100 20 5**

**2 Febrero 200 40 4**

**3 Marzo 300 50 8**

**4 Abril 400 30 2**

**--------------------------------------------------**

**Total 1000**

**--------------------------------------------------**

**() Ejercicio 2.**

**Un compañía lechera tiene que suplir las siguientes cantidades de litros de leche en los próximo meses. La producción que se realiza durante un mes se debe entregar el último día de dicho mes. El costo de mantener inventarios por mes es de $5 por artículo. Existe un costo de preparación de la producción, pues antes de producir la leche se deben limpiar y precalentar las máquinas. Cada vez que se inicia un proceso productivo, se debe cubrir este costo sin importar la cantidad de litros de leche que se produzcan. El costo de preparación de la producción es de $500 y el costo variable de producción es de $10 por litro de leche. Se desea encontrar una política de producción óptima que minimice los costos totales.**

**--------------------------------------------------**

**Costo Costo**

**No. Mes Demanda Producción Inventario**

**--------------------------------------------------**

**1 Enero 100 10 5**

**2 Febrero 200 10 5**

**3 Marzo 300 10 5**

**4 Abril 400 10 5**

**--------------------------------------------------**

**Total 1000**

**--------------------------------------------------**

**() Ejercicio 3.**

**Se desea encontrar la ruta más corta para llegar desde el nodo c1 hasta el nodo t. A continuación se presentan las distancias entre los nodos.**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| -> | c2 c3 c4 | | -> | c5 c6 c7 |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| c1 | 2 3 4 | | c2 | 7 4 6 |**

**| | | | c3 | 3 2 4 |**

**| | | | c4 | 4 2 5 |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| -> | c8 c9 | | -> | t |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| c5 | 1 4 | | c8 | 3 |**

**| c6 | 6 3 | | c9 | 4 |**

**| c7 | 3 4 | | | |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**() Ejercicio 4.**

**Se desea encontrar la ruta más corta para llegar desde el nodo A hasta el nodo T. A continuación se presentan las distancias entre los nodos.**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| -> | b1 b2 | | -> | c1 c2 |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| a | 5 9 | | b1 | 4 6 |**

**| | | | b2 | 3 1 |**

**| | | | | |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| -> | d1 d2 d3 | | -> | t |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**| c1 | 3 4 M | | d1 | 9 |**

**| c2 | M 6 4 | | d2 | 3 |**

**| | | | d3 | 10 |**

**+----+-----------+ +----+-----------+**

**() Ejercicio 5.**

**Una persona que va de campamento debe elegir qué cosas llevar en su mochila. La mochila soporta un peso de hasta 10 kilos. Como va de campamento con un grupo de amigas y amigos es posible que lleve más de una unidades de un mismo artículo. Los pesos y utilidad estimada se muestran en la tabla siguiente. Se desea maximizar el nivel de utilidad de la mochila sin exceder el peso que puede soportar.**

**---------------------------**

**Artículo Peso Utilidad**

**---------------------------**

**1. Comida 3 7**

**2. Agua 4 8**

**3. Colchón 6 11**

**---------------------------**

**() Ejercicio 6.**

**Se está preparando un contenedor con frutas para la exportación. El contenedor tiene una capacidad de 200kg. Se desea llenar el contenedor con tres cuatro tipos de cajas frutas. Cada caja tiene un peso y un valor diferentes. El objetivo es llenar el contenedor de manera tal, que sin violar la restricción del peso, se pueda obtener la mayor utilidad posible al momento de vender las cajas de frutas.**

**--------------------------------**

**Artículo Peso Utilidad**

**(kilos) (dólares)**

**--------------------------------**

**1. Banano 25 $6**

**2. Nectarina 40 $7**

**3. Mango 60 $9**

**4. Manzanas 50 $8**

**--------------------------------**

**() Ejercicio 7.\***

**Se tienen 5 equipos médicos que pueden ser asignados a 3 hospitales diferentes del país. Se desea determinar cuántos de estos equipos se deben entregar a cada hospital para maximizar el número de vidas que se pueden salvar. La tabla siguiente muestra el estimado de personas que se salvarían al asignar los equipos.**

**------------------------**

**No ...Hospital..**

**Equipos 1 2 3**

**------------------------**

**0 0 0 0**

**1 45 20 50**

**2 70 45 70**

**3 90 75 80**

**4 105 110 100**

**5 120 150 135**

**------------------------**

**() Ejercicio 8.**

**Un analista de sistemas cuenta con siete días antes de entregar sus informes finales. El analista desea asignar este tiempo de la mejor manera posible. Va a dedicar por lo menos un día de trabajo a cada uno de los cuatro proyectos en los que está trabajando, y desea concentrarse solo en un proyecto por día. De esta forma desea asignar 1, 2 3 o 4 días a cada proyecto de manera que logre maximizar el nivel de avance de cada uno de los proyectos. El analista estima, basado en sus experiencias anteriores, estima que el nivel de avance que obtendría está dado por la tabla que se muestra a continuación. Resuelva el problema utilizando programación dinámica.**

**---------------------**

**Días .Nivel Avance.**

**P1 P2 P3 P4**

**---------------------**

**1 30 50 20 60**

**2 50 55 40 70**

**3 60 60 70 90**

**4 75 90 80 90**

**---------------------**

**() Ejercicio 9.**

**En una campaña de mercadeo se tiene dinero para producir 5 anuncios televisivos. En la actualidad se están vendiendo tres productos importantes los cuales se desean apoyar con los anuncios. A continuación se muestra una tabla donde se indica el aumento en ventas que produciría en cada producto de acuerdo al número de anuncios comerciales que reciba. Se desea asignar los comerciales a los productos de manera tal que se maximice las ventas totales de los mismos.**

**--------------------------**

**Número ..Productos..**

**Anuncios A B C**

**--------------------------**

**0 0 0 0**

**1 3 5 4**

**2 7 10 6**

**3 9 11 10**

**4 12 11 12**

**5 13 12 12**

**--------------------------**

**() Ejercicio 10.**

**La Organización Mundial para la vivienda cuenta con 6 grupos de voluntarios que pueden ir a construir viviendas para personas de escasos recursos a 4 países diferentes. A continuación se muestra una tabla donde se indica la cantidad de casas, en miles, que se pueden construir en cada uno de los diferentes países. Por medio de programación dinámica indique el la cantidad de grupos que se deben enviar a cada país, de manera tal que se maximice el número total de casas construidas.**

**-------------------------**

**No ......País......**

**Grupos 1 2 3 4**

**-------------------------**

**0 0 0 0 0**

**1 9 14 10 13**

**2 10 23 21 22**

**3 30 32 30 29**

**4 37 37 38 33**

**5 45 40 43 35**

**6 48 43 47 39**

**-------------------------**

**() Ejercicio 11.**

**Por razones de seguridad, una compañía de bodegas informáticas mantiene "backups" de sus clientes en tres lugares diferentes. Cada uno de los backups tiene una probabilidad de tener errores, dependiendo del lugar donde se encuentra. Para tener una seguridad adicional se puede manteiene más de una copia almacenada. La compañía desea encontrar donde debe tener las copias adicionales, hasta un máximo de dos, para así poder minimizar la probabilidad de fallo simultánea de las tres localidades. A continuación se muestra una tabla con las probabilidades de error según el lugar donde se encuentren. Por ejemplo, si no se asignan "backups" adicionales, la probabilidad de error simultáneo estaría dada por 0.20\*0.30\*0.40=0.024.**

**--------------------------**

**Backups Localizaciones**

**A B C**

**--------------------------**

**0 0.20 0.30 0.40**

**1 0.10 0.20 0.25**

**2 0.05 0.10 0.15**

**--------------------------**

**() Ejercicio 12.**

**Una corporación ha recibido propuestas de sus plantas para realizar una expansión de las mismas. En la actualidad se cuenta con un presupuesto de $5 millones para asignarlo a las tres plantas. Cada una de las propuestas indica el costo (C) y el ingreso (I). En la tabla que se muestra a continuación se resumen los costos e ingresos de cada propuesta. Se desea maximizar el ingreso total resultante de la asignación de los $5 millones a cada una de las plantas.**

**------------------------------------**

**Propuesta Planta1 Planta2 Planta3**

**C1 I1 C2 I2 C3 I3**

**------------------------------------**

**1 0 0 0 0 0 0**

**2 1 5 2 8 1 4**

**3 2 6 3 9 - -**

**4 - - 4 11 - -**

**------------------------------------**

**() Ejercicio 13.\***

**Una empresa debe comprar un equipo el cual debe mantener y/o reemplazar por los próximos 6 años. Según los datos recopilados, el valor de un equipo nuevo es de $100, los costos de operación y el valor de rescate al que se puede vender un equipo viejo se presentan en la siguiente tabla. Se desea establecer la política óptima y saber cuando comprar y vender el equipo de manera que a lo largo de 6 años se minimicen los costos totales.**

**--------------------------**

**Edad Costo Valor**

**Años Operación Rescate**

**--------------------------**

**1 40 60**

**2 50 40**

**3 70 20**

**4 90 10**

**5 105 5**

**6 120 0**

**--------------------------**

**() Ejercicio 14.**

**Una fábrica de tortillas debe establecer la política óptima de reemplazo de uno de sus hornos. A continuación se muestra una tabla con los costos de mantenimiento y rescate del horno.**

**---------------------------**

**Costo Valor**

**Edad Operación Rescate**

**---------------------------**

**1 5 40**

**2 10 40**

**3 30 35**

**4 10 35**

**5 5 0**

**6 5 0**

**---------------------------**

**El costo de un horno nuevo es de $100. Su costo de operación y de rescate se muestra en la tabla. El horno debe reemplazarse después de 6 años de operación, pues en ese momento su costo de rescate es 0.**

**Se desea establecer una política óptima que minimice los costos durante los próximos 6 años.**

**(a) Obtenga la política óptima si al inicio del proceso se cuenta con un horno nuevo.**

**(b) Obtenga la política óptima si al inicio del proceso se cuenta con un horno que debe cambiars a lo sumo cada 3 años.**

**() Ejercicio 15. \*\*\***

**Un compañía fabrica un producto único. La demanda para los próximos cuatro meses es de 1000 unidades para el primer mes, 800 unidades para el segundo mes, 1200 unidades para el tercer mes y 900 unidades para el último mes.**

**El costo de producción de los artículos varía de mes a mes, debido al aumento en la materia prima. Para el primer mes cuesta $10 por artículo, para el segunto mes $20, para el tercer mes $10 y para el cuarto mes $20 por artículo. Un mes dado se pueden producir más artículos de lo necesario, los cuales se pueden guardar como inventario a un costo de $3 por unidad.**

**A continuación se presenta una tabla con estos datos:**

**--------------------------------------------**

**No. Mes Demanda Costo Inventario**

**--------------------------------------------**

**1 Enero 1000 $10 $3**

**2 Febrero 800 $20 $3**

**3 Marzo 1200 $10 $3**

**4 Abril 900 $20 $3**

**--------------------------------------------**

**Total 3900**

**--------------------------------------------**

**Se desea encontrar una política de producción óptima que minimice los costos totales.**

**(a) Para el problema anterior construya un modelaje en programación lineal.**

**(b) Utilizando el modelo lineal obtenga el análisis de sensibilidad y compruebe que también sirve para el problema de programación dinámica.**

**R/**

**Se utilizan las variables:**

**x1: producción normal de enero**

**x2: producción normal de febrero**

**x3: producción normal de marzo**

**x4: producción normal de abril**

**i1: producción para inventario de enero**

**i2: producción para inventario de febrero**

**i3: producción para inventario de marzo**

**Con las anteriores variables se construye el modelaje:**

**min z = 10 x1 + 20 x2 + 10 x3 + 20 x4**

**+ 3 i1 + 3 i2 + 3 i3**

**x1 - i1 = 1000**

**i1 + x2 - i2 = 800**

**i2 + x3 - i3 = 1200**

**i3 + x4 = 900**

**x1,x2,x3,x4,i1,i2,i3 >= 0**

**() Ejercicio 16. \*\*\***

**Una diligencia debe llevar dinero desde la ciudad "a" hasta la ciudad "t" utilizando la ruta más corta posible. La distancias entre ciudades se encuentran descritas por el siguiente grafo.**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| -> | b c d | | -> | e f g |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| a | 4 6 6 | | b | 6 8 9 |**

**| | | | c | 5 4 6 |**

**| | | | d | 5 5 7 |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| -> | h i | | -> | t |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**| e | 6 8 | | h | 9 |**

**| f | 4 9 | | i | 6 |**

**| g | 3 7 | | | |**

**+----+------------+ +----+-----------+**

**Resuelva el modelo utilizando programación lineal.**

**R/**

**Se utilizarán las variables:**

**xij: vale 1 si viaja del nodo "i" al nodo "j".**

**vale 0 si no viaja del nodo "i" al nodo "j".**

**Por ejemplo:**

**xeh = 1 significa que se viaja del nodo "e" al nodo "h".**

**Con lo cual se puede realizar el siguiente modelaje:**

**min z = 4 xab + 6 xac + 6 xad**

**+ 6 xbe + 8 xbf + 9 xbg**

**+ 5 xce + 4 xcf + 6 xcg**

**+ 5 xde + 5 xdf + 7 xdg**

**+ 6 xeh + 8 xei**

**+ 4 xfh + 9 xfi**

**+ 3 xgh + 7 xgi**

**+ 9 xht + 6 xit**

**xab + xac + xad = 1**

**xab - xbe - xbf - xbg = 0**

**xac - xce - xcf - xcg = 0**

**xad - xde - xdf - xdg = 0**

**xbe + xce + xde - xeh - xei = 0**

**xbf + xcf + xdf - xfh - xfi = 0**

**xbg + xcg + xdg - xgh - xgi = 0**

**xeh + xfh + xgh - xht = 0**

**xei + xfi + xgi - xit = 0**

**xht + xit = 1**

**xij >= 0 para todo i**

**para todo j**

**() Ejercicio 17. \*\*\***

**Una persona se encuentra en una cueva donde hay tres tipos de piedras preciosas. Diamantes, esmeraldas y rubíes. Cada una de estas piedras tiene un cierto peso y valor, los cuales se describen en la siguiente tabla.**

**-------------------------**

**Piedra Peso Valor**

**kilos dólares**

**-------------------------**

**Diamante 3 400**

**Esmeralda 2 300**

**Rubí 2 100**

**-------------------------**

**La persona tiene un bolsa en la que puede llevar un máximo de 11 kilos. El problema consiste en decidir cuántas piedras de cada clase debe llevar de manera tal que no se exceda la capacidad de la bolsa. Las piedras no se pueden romper, pues son sumamente duras y no se cuenta con herramientas para cortarlas. Se desea maximizar la ganancia al momento de vender el contenido de la bolsa.**

**Resuelva el problema mediante programación lineal.**